$\langle \rho \rangle = \{\rho, \rho^2, i\} \quad |\rho| = 3$

$\sigma^3 = i$

$\rho^3 = i$

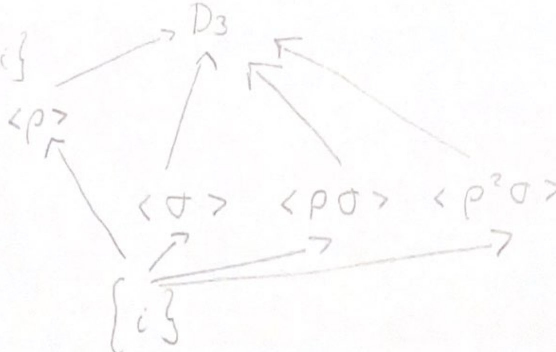
$\sigma\rho = \rho^2\sigma$

$\langle \sigma \rangle = \{\sigma, i\} \quad |\sigma| = 2$

$\rho\sigma\rho\sigma = \rho\rho^2\sigma\sigma = \rho^3 = \sigma^2 = ii = i$

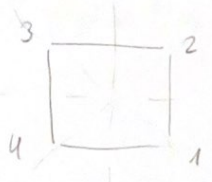
$\langle \rho\sigma \rangle = \{\rho\sigma, i\} \quad |\rho\sigma| = 2$

$\langle \rho^2\sigma \rangle = \{\rho^2\sigma, i\}$



$D_4 =$ hacerlo

$|D_4| = 8 \rightarrow |D_n| = 2n \quad \boxed{\rho^4 = i \quad \sigma^2 = i \quad \sigma\rho = \rho^3\sigma}$

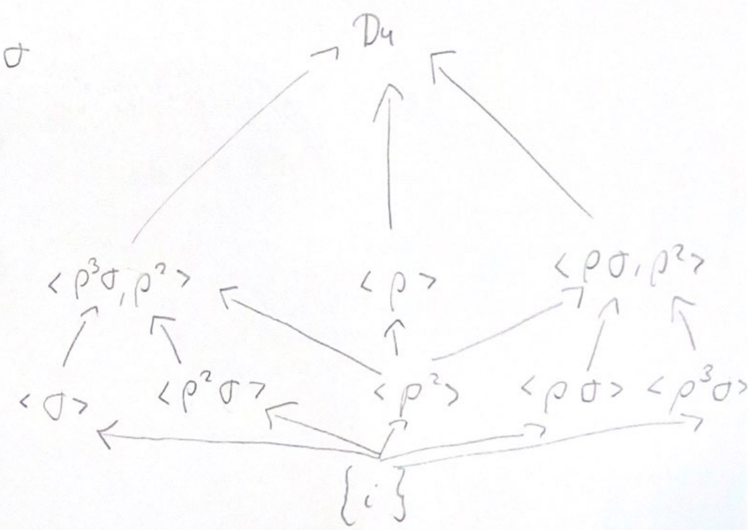


$D_4 = \{\rho, \rho^2, \rho^3, i, \sigma_d, \sigma_D, \sigma_R, \sigma_v\}$

$\{\rho, \rho^2, \rho^3, i, \rho\sigma, \sigma, \rho^3\sigma, \rho^2\sigma\}$

$\langle \rho\sigma, \rho^2 \rangle = \{\rho\sigma, \rho^2, \rho^3\sigma, i\}$

$\rho\sigma\rho^2 = \rho\rho^3\sigma\rho = \sigma\rho = \rho^3\sigma$



* Repaso de criterios para que un grupo sea normal:

Def: $xH = Hx$ $\quad$ $xh = h'x$

completa

i) $xHx^{-1} \subset H$

ii) H es el único subgrupo con $|H|$

iii) $[G:H] = 2 = \frac{|G|}{|H|}$

iv) G abeliano

v) $H \leq Z(G)$

$\boxed{32}$ $\underbrace{H \leq G \,/\, \forall x \in G \quad x^2 \in H}_{\text{hipótesis}}$ $\quad$ Dem: $\underbrace{H \trianglelefteq G}_{\text{Tesis (empl)}}$, G/H abeliano

$xHx^{-1} = \{ xhx^{-1} / h \in H \}$

lo que queremos saber es que $x^2 \in H$

$xHx^{-1} \subset H$: $xhx^{-1} = xh\tilde{h}x = \underbrace{(xh\tilde{h})(xh\tilde{h})}_{\subset H} \underbrace{(h\tilde{h})}_{\subset H}^{-1} \in H$

$x^2 \in H$

$x^2 = h'$

$x = h'x^{-1}$, $x = x^{-1}h'$

$(h')^{-1}x = x^{-1}$

$\tilde{h}x = x^{-1}$

. Comprobamos si es abeliano la operación:

$xH * yH = xyH$
$yH * xH = yxH$ $\Big\}$ $xyH = yxH$: $\quad xyH < yxH \quad yxh'$
$xyH > yxH$

Sea $xyh = yxx^{-1}y^{-1}xyh = \ldots = yxh'$

$= yx(yx)^{-1}xyh =$

$= yxh'y(xx)yh$ $\quad$ hipótesis

$= yxh'y\tilde{h}yh =$ $\quad H \trianglelefteq G$

$= yx(h'yy\tilde{h}'h) \in yxH$

$H \; H \; H \; H$

homomorfismo de grupos

def. $(G, \circ)$, $(F, *)$ grupos → está siempre definida y la imagen es única

Es una aplicación que muestra que operar en G es lo mismo que operar en F, es

$$G \xrightarrow{f} F \qquad f(gh) = f(g) * f(h)$$

$g, h \quad\quad f(g), f(h)$

$gh \quad\quad f(gh)$

ejemplos:

1) $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $\quad e^{x+y} = f(x+y) = f(x) f(y) = e^x e^y$ } se cumple

$x \quad\quad f(x) = e^x$

aplicación

da igual sumar que multiplicar, es lo mismo

$f(0) = 1 \quad f(-2) = e^{-2} \quad f(2)^{-1} = (e^2)^{-1}$

2) $GL(n) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $\quad |AB| = g(AB) = g(A) \cdot g(B) = |A||B|$ } se cumple

$A \quad\quad |A|$

3) $D_3 \xrightarrow{h} S_3$

$\rho \quad (1\ 2\ 3)$

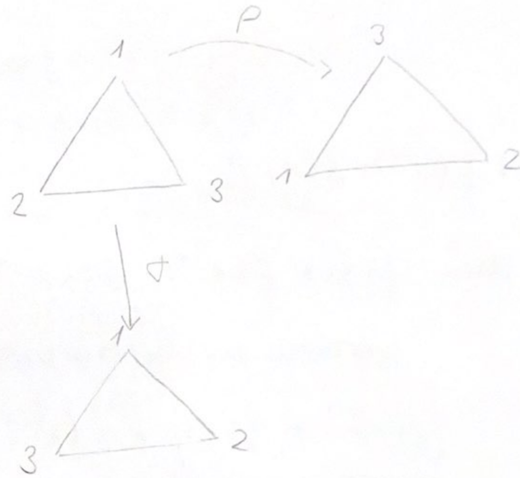
$\sigma \quad (1\ 2)$

$\rho^2 \quad (1\ 3\ 2)$

i

$\rho\sigma$

$\rho^2\sigma$



en vez de ver si $h(xy) = h(x) * h(y)$ se cumple, vamos a ver que las relaciones de grupo dihédrico se cumpla en el grupo de permutaciones:

$\rho^3 = i$ $\qquad (1\ 2\ 3)^3 = i$

$\sigma^2 = i$ $\qquad (2\ 3)^2 = i$

$\sigma\rho = \rho^2\sigma$ $\qquad (2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)^2(2\ 3)$

$\hookrightarrow (2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3)$

$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)(2\ 3) = (1\ 3)$

* <u>Propiedades de los homomorfismos:</u> $f : (G, \cdot) \longrightarrow (F, *)$

1) $f(e_1) = e_2$ $\qquad e_1$ neutro de G, e_2 neutro de F.

dem: Sea $g \in G$, $\left.\begin{array}{l} f(g) * f(e_1) = f(ge_1) = f(g) \\ f(e_1) * f(g) = f(e_1 g) = f(g) \end{array}\right\} \Rightarrow f(e_1) = e_2$

f es homomorfismo.

2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

dem: $f(x) * f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e_1) = e_2$

operamos por la izquierda con $f(x)^{-1}$

$\underbrace{\left(f(x)^{-1} * f(x)\right)}_{e_2} * f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Def. El núcleo de un homomorfismo son los elementos que van a parar al neutro

/relación homo núcleo

$$f:(G,\cdot)\longrightarrow(F,*)$$

$$\operatorname{Ker}(f)=\{g\in G \,/\, f(g)=e_2\}$$

* Teorema 1 EXAMEN

$\operatorname{Ker} f \trianglelefteq G$ ¿Por qué es normal

¿Por qué es subgrupo

El núcleo es un subgrupo normal de G.

dem. 1) $\operatorname{Ker} f\leq G$: $g,h\in \operatorname{ker} f$ $\quad gh^{-1}\in \operatorname{Ker} f$:

$f(gh^{-1})=f(g)*f(h^{-1})=f(g)*f(h)^{-1}=f(gh^{-1})=\dots=e_2$

$=e_2 * e_2^{-1}=e_2$ es homomorfismo

2) $\operatorname{Ker} f\trianglelefteq G$: $\quad g(\operatorname{Ker} f)g^{-1}\subset \operatorname{Ker} f$: Sea $k\in \operatorname{ker} f$

$gkg^{-1}\in \operatorname{Ker} f$: →

→ : $f(gkg^{-1})=\dots \qquad =e_2$

$f(gkg^{-1})=f(g)*f(k)*f(g^{-1})=$

$=f(g)*e_2*f(g)^{-1}=e_2$

* Teorema 2

f es inyectivo $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f=\{e_1\}$

inyectivo: no hay dos elementos con la misma imagen

dem: $\Rightarrow$ si $x\in \operatorname{Ker} f$ entonces $f(x)=e_2=f(e_1)\Rightarrow x=e_1$

→ $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

$\Leftarrow$ $f(x)=f(y)\dots \quad x=y$:

clases: multiplicar un elemento por todos [illegible]

Grupo cociente $G/H \times G/H \longrightarrow G/H$

$gH \quad g'H \qquad gg'H$

Teorema

a) $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq F$

caso particular $\operatorname{Im} f = f(G) \leq F$

Teoremas de isomorfía

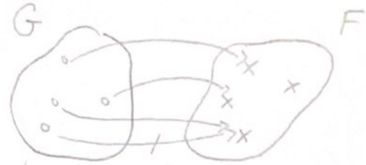
¿Cuándo 2 grupos son isomorfía? $(G, \cdot)$ $(F, *)$ gr

Cuando son iguales como conjuntos. $f: G \longrightarrow F$ a. biyectiva (uno a uno) } *

aplicación

siempre definida / imagen única

Cuando son iguales sus operaciones f homomorfismo



2 elementos no tienen la misma imagen – inyectiva
cada elemento tiene – sobreyectiva } biyectiva o biyección

* isomorfismos

$G \sim F$

G es isomorfo de F

→ Notación:

f. homom. inyectivo = monomorfismo

f. homom. sobrectivo = epimorfismo

Un isomorfismo de G a G = automorfismo

Teorema: $G \sim F$ $\quad f: G \rightarrow F$

a) G abeliano $\Longleftrightarrow$ F abeliano

b) G cíclico $\Longleftrightarrow$ F cíclico

dem: la hipótesis es que G es abeliano entonces la tesis es abeliano

a) $\Rightarrow$) $\quad$ G abel

1º empezar por la tesis $\quad x, y \in F \quad x * y = f(a) * f(b) = f(ab) \overset{\circledast}{=}$

↑ f sobreyectiva $\quad a, b \in G$

↑ f homomorfismo $\quad f: G \to F \quad f(gg') = f(g) * f(g')$

?

$\overset{\circledast}{=} f(ba) = f(b) * f(a) = y * x$

↑ hipot

$\Leftarrow$ igual

b) G cíclico $G = \langle g \rangle = \langle g' \rangle$ $\quad f: G \xrightarrow{\sim} F$

Sea $x \in F$ $\quad x = f(a) = f(g^m) = f(g)^m \Rightarrow F = \langle f(g) \rangle$

$a \in G$ $\quad \uparrow$ $\quad \uparrow$

f sobreyectiva $\quad$ hipot $\quad$ f homomorfismo

$a = g^m$

$m \in \mathbb{N}$

ejemplo: $\mathbb{Z}_6 \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ⊛

def: el producto cartesiano de conjuntos G, F

$G \times F = \{ (g, f) / g \in G \ f \in F \}$ $\quad G \times F \times H = (g, f, h)$

el producto cartesiano de grupos $(G, \cdot)(F, *)$

$(G \times F) \times (G \times F) \longrightarrow G \times F$

$(g, f) \quad (g', f') \qquad (g, f) \circ (g', f') = (gg', f * f')$

$|(g, f)| = \text{mcm}(|g|, |f|)$

$\mathbb{Z}_6$ ⊛ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{ \bar{a}, \bar{b} / \bar{a} \in \mathbb{Z}_2, \bar{b} \in \mathbb{Z}_3 \} = \langle (\bar{1}, \bar{1}) \rangle$ ⊙

$(\bar{1}, \bar{2}) + (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0}) = e$

opuestos (es como el inverso pero en la suma)

$|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6$

⊙ $|(\bar{1}, \bar{1})| = \text{mcm}(2, 3) = 6$

abeliano

ej. 2. $\mathbb{Z}_8$ gr. abeliano $\quad \propto \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

$(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{c}, \bar{d}) = (\bar{a} + \bar{c}, \bar{b} + \bar{d})$

$|(\bar{a}, \bar{b})| = \text{mcm}(|\bar{a}|, |\bar{b}|) = \text{mcm}(2, 4) = 4$

teoremas de isomorfía

$f:(G,\cdot) \longrightarrow (F,*)$ homom $\Rightarrow \ker f \trianglelefteq G$

1^{er} Th. de isomorfía:

$f:(G,\cdot) \longrightarrow (F,*)$ homom $\Rightarrow \ker f \trianglelefteq G$

$G/_{\ker f} \sim \operatorname{Im} f$

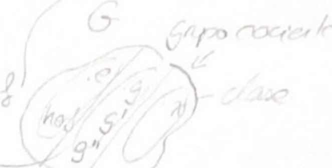
dem: $\tilde{f}: G/_{\ker f} \longrightarrow \operatorname{Im} f$

$f(g) = f(g')$ ← es igual?

$g \ker f = \{g'k / k \in \ker f\}$

$\overset{\shortparallel}{\{gh / h \in \ker f\}}$

81)



$g \ker f = g' \ker f$
$g \in g' \ker f$
$g' \in g \ker f$

1°) ¿Bien definido?

e_2 Neutro de F

$g' \in g \ker f;\ g' = gk \ / \ k \in \ker f$ ← entonces $e_2 \in \ker$ (núcleo)

se pasa ahí porque

$f(g') = f(gk) = f(g) * f(k) = f(g) * e_2 = f(g)$

2°) ¿La imagen es única?

a. porque f es aplicación.

3°) Sobreyectiva (porque todos los elementos caen a la imagen de f)

4°) Inyectiva $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

no hay dos elementos con la misma imagen

$g \ker f;\ g' \ker f$ $\quad \tilde{f}(g \ker f) = \tilde{f}(g' \ker f) \Rightarrow g \ker f = g' \ker f$

$\underbrace{f(g) = f(g')}_{\text{hipot}} \Rightarrow \boxed{\underbrace{g \in g' \ker f}_{\text{Tesis}}}$

$f(g) = f(g'),\quad f(g) * f(g')^{-1} = e_2;\quad f(g) * f(g'^{-1}) = e_2$

$f(gg'^{-1}) = e_2;\ gg'^{-1} \in \ker f;\ \dfrac{gg'^{-1} = k,}{g = kg'}\ \ k \in \ker f,\ \underset{\uparrow}{=}\ g'k'$

es un subgrupo normal

5) $\tilde{f}$ homomorfismo $\quad (G/\ker f, \circledast) \quad g \ker f \circledast g' \ker f = gg' \ker f$

$$\underbrace{\tilde{f}(g \ker f \circledast g' \ker f)}_{\text{grupo cociente}} = \underbrace{\tilde{f}(g \ker f) * \tilde{f}(g' \ker f)}_{\text{imagen}}$$

$$\tilde{f}(g \ker f \circledast g' \ker f) = \underbrace{\tilde{f}(gg' \ker f) = f(gg')}_{\tilde{f} \text{ definida } g \ker f \text{ es } f(g)} \underset{\text{homomorfismo}}{=} f(g) * f(g') =$$

$$= f(g) * f(g') = \tilde{f}(g \ker f) * \tilde{f}(g' \ker f)$$

——— 1er parcial

$\boxed{38}$ Ser subgrupo es ser grupo por sí mismo, independiente del ambiente.

Ser subgrupo normal depende del ambiente

Si $K \trianglelefteq G \Rightarrow K \trianglelefteq H$ | $K \trianglelefteq H \not\Rightarrow K \trianglelefteq G$, aunque $H \trianglelefteq G$

subgr. normal $g h \overset{\neq}{=} k g \Rightarrow h k = k h$

$\forall g \in G$ $\quad \forall h \in H$

lo grupos conmuta

$K \leq G \Rightarrow K \leq H$

$K \leq H$ y $H \leq G \Rightarrow K \leq G$

a) S_4 $H = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle = \{(12)(34), (13)(24), \underbrace{(14)(23)}_{(12)(34) \circ (13)(24)}, i\}$ subgrupo

elegimos K...

$K = \{(12)(34), \underbrace{i}_{neutro}\}$

$K \trianglelefteq H$: 1) H abeliano

2) $[H : K] = \dfrac{|H|}{|K|} = \dfrac{4}{2} = 2 \Rightarrow K \trianglelefteq H$

$H \trianglelefteq S_4$: probamos

para H no

$(123)H = \begin{cases} (123)(12)(34) = (134) \\ (123)(13)(24) = (243) \\ (123)(14)(23) = (142) \end{cases}$ (123)

$H(123) \begin{cases} (12)(34)(123) = (243) \\ (13)(24)(123) = (142) \\ (14)(23)(123) = (134) \end{cases}$ (123)

Para comprobarlo hay que probar: $(243)H = H(243)$

$K \ntrianglelefteq G$. $(1234)K \begin{cases} (1234)i = (1234) \\ (1234)(12)(34) = (13) \end{cases}$ como las dos K son distintos $K \ntrianglelefteq G$

$K(1234) \begin{cases} i(1234) = (1234) \\ (12)(34)(1234) = (24) \end{cases}$